

0717707-1

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Газизов Евгений Равильевич

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ
КАНАЛАХ: ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ И
ЭЛЕКТРОХИМИИ

01.02.05. - Механика жидкости, газа и плазмы



АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ - 2000

Работа выполнена в Отделении математического моделирования Научно-исследовательского института математики и механики им. Н.Г.Чеботарева Казанского государственного университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Д.В.Маклаков

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Л.М.Котляр

доктор физико-математических наук,
профессор Н.Д.Якимов

Ведущая организация:

Уфимский государственный
авиационно-технический университет
г.Уфа

Защита состоится " 5 " октября 2000 г. в 14 час. 30 мин. в ауд. физ. 2 на заседании Совета Д 053.29.01 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, КГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан " " "

2000г.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КФУ



870092

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук

А.А.Саченков

Актуальность темы. Традиционной областью приложения задач о течении тяжелой жидкости в открытых каналах является проектирование гидротехнических сооружений. Простота постановки и неожиданная сложность в достижении решения привлекали и привлекают к этим задачам внимание ученых. Малоизученными, в частности, являются безволновые докритические режимы обтекания препятствия на дне, что связано с невозможностью построения решения для этих режимов в рамках линейной теории малых возмущений. В последние годы задачи о течениях жидкости в открытых каналах получили новое приложение. Как оказалось, в случае двумерных течений идеальной жидкости отыскание свободной поверхности эквивалентно определению формы детали анода при электрохимическом формообразовании. Необходимо лишь заменить граничное условие постоянства давления на свободной поверхности соответствующим условием стационарности обработки.

Электрохимическая размерная обработка (ЭХРО) металлов занимает важное место в современном машиностроении, так как позволяет обрабатывать детали из высокопрочных материалов, а также детали, не допускающие механическое и температурное воздействие. Развитие математических методов расчета анодного формообразования обусловлено повышением точности обработки, которая остается одной из основных проблем в технологии ЭХРО.

В настоящей диссертационной работе решен ряд задач гидромеханики и электрохимии, объединенных общей темой изучения течений идеальной жидкости в каналах, которые имеют как теоретический, так и практический интерес.

Цель диссертационной работы состоит в разработке метода, позволяющего находить решение задач о плоском потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости в открытых каналах, в случаях, когда одна стенка канала задана, а другая должна определяться в ходе решения по достаточно произволь-

ным нелинейным граничным условиям.

Научная новизна результатов. Разработан численно-аналитический метод, позволяющий решать в точной постановке стационарную задачу безволнового обтекания препятствия в виде наклонной ступени весомой жидкостью, а также решать задачи анодного формообразования с учетом произвольной зависимости выхода по току и неравномерной поляризации анода.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечиваются применением строгих математических методов при построении решений, проведением внутренних тестов на проверку точности вычислений и совпадением результатов решения некоторых задач с уже известными данными других авторов.

Практическая ценность. Разработанный в диссертации метод и полученные результаты могут быть использованы при исследовании течений тяжелой жидкости (воды) над неровным дном и при решении ряда задач электрохимической размерной обработки.

Апробация работы. Основные положения диссертации по мере их получения докладывались на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета в 1991-1994 г.г., 1999 г.; на городских научно-технических конференциях "Электрохимические и электрофизические методы обработки материалов" ("ЭФЭХО") в 1992-1994 г.г.; на 5 Всесоюзной научной школе "Гидродинамика больших скоростей" (г. Чебоксары, 1992 г.); на Международной научной конференции "Модели механики сплошной среды" (г. Казань, 1993 г.); на Международной научно-технической конференции "Механика машиностроения" (г. Набережные Челны, 1995 г.); на Всероссийской научной школе - конференции "Краевые задачи и их приложения" (г. Казань, 1999 г.); на Международной научно - технической конференции "Техноикономические проблемы промышленного производства" (г. Набережные Челны, 2000 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, список которых приведен в конце автореферата.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Н. И. Лобачевского
Казанского гос. университета

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 107 страниц, содержит 27 рисунков. Список литературы насчитывает 88 наименований.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, кратко изложено содержание работы.

В первом разделе исследуется стационарное течение тяжелой жидкости со свободной поверхностью над полигональным дном в форме наклонной ступени. Отыскиваются безволновые режимы обтекания.

В п. 1.1 дан обзор исследований стационарных задач обтекания препятствий под свободной поверхностью весомой жидкости. Основным параметром, характеризующим движение тяжелой жидкости, является число Фруда: $Fr = V_0/\sqrt{gh}$, где g - ускорение силы тяжести, h - глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 - скорость невозмущенного потока слева на бесконечности. Скорость $V_* = \sqrt{gh}$ называется критической. Если $Fr < 1$, то течение является докритическим, если $Fr > 1$ - свехкритическим. Критическая скорость V_* есть скорость распространения малых возмущений по свободной поверхности. Поэтому число Фруда играет в этих задачах роль, аналогичную числу Маха в газовой динамике.

Результаты линейной теории и некоторые числовые расчеты, проведенные в точной нелинейной постановке, показывают, что в случае докритического течения задачи обтекания препятствий характеризуются образованием цуга нелинейных волн вниз по потоку. Однако при определенных количественных соотношениях между числом Фруда и параметрами дна эти волны могут отсутствовать. F. Dias и J.-M. Vanden-Broeck ¹ нашли безволновые докритические решения для задачи обтекания треугольного препятствия на горизонтальном дне, L.K. Forbes ² - для задачи

¹Dias F., Vanden-Broeck J.-M. Open channel flow with submerged obstruction// J. Fluid Mech. - 1989. - V. 206. - P. 155-170.

²Forbes L.K. Critical free-surface flow over a semi-circular obstruction// J. Engng. Math. -

обтекания кругового препятствия. Существенным в обеих вышеупомянутых работах было условие совпадения уровней дна слева и справа от препятствия. А.С. King, M.I.G. Bloor³ решили задачу о сверхкритическом безволновом обтекании вертикальной ступени. Безволновые режимы при $Fr < 1$ ими обнаружены не были. Кроме того, А.С. King, M.I.G. Bloor исследовали лишь случай ступени, повышающей уровень дна. Подробные расчеты докритического обтекания прямоугольной ступени проведены Д.В. Маклаковым⁴. Им установлено, что если ступень повышает уровень дна, то при $Fr < 1$ с ростом ее высоты длина волн за ступенью увеличивается и в пределе течение переходит в безволновой режим (гребень первой волны уходит на бесконечность). Тем самым показано, что безволновые докритические режимы обтекания являются предельным случаем волновых режимов.

В п. 1.2 рассмотрено стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой весомой жидкости над неровным полигональным дном в форме наклонной ступени (рис. 1).

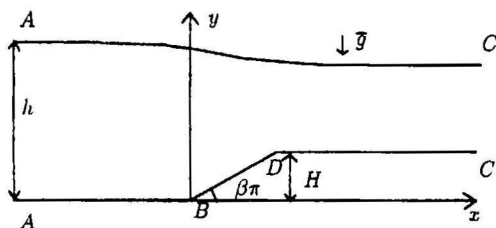


Рис. 1: Физическая область течения

Вводится декартова система координат (x, y) , причем ее начало лежит в основании ступени. Задается h - глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 -

1988. - V. 22. - P. 3-13.

³King A.C., Bloor M.I.G. Free-surface flow over a step// J. Fluid Mech. - 1987. - V. 182. - P. 193-208.

⁴Маклаков Д.В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами Изд-во: "Янус-К". - Москва, 1997. - 280 с.

скорость набегающего потока, $\beta\pi$ - угол наклона ступени к оси x , g - ускорение силы тяжести. Сила тяжести действует в направлении, противоположном направлению оси y .

Исходная задача сводится к краевой задаче отыскания аналитической в канонической области D_t функции $\chi(t) = \ln(\frac{\pi}{2h} \frac{dz}{dt})$. В качестве канонической области выбирается полоса ширины $\pi/2$ в параметрической плоскости t . Если найдена функция $\chi(t)$, то искомое конформное отображение $z(t)$ определяется интегралом

$$z(t) = \frac{2h}{\pi} \int_0^t e^{\chi(t)} dt$$

Так как в задаче присутствует неизвестный параметр d , определяющий в параметрической плоскости положение точки D , то для замыкания задачи необходимо вывести дополнительное условие. При выводе этого условия существенным является режим обтекания ступени. В п. 1.2.1 рассмотрен докритический режим обтекания. Путем выделения в искомой функции асимптотики поведения на бесконечности выведено дополнительное условие для нахождения неизвестного параметра, определяющего высоту ступени d в параметрической плоскости.

В п. 1.2.2 рассмотрен сверхкритический режим обтекания. При этом считается, что сверхкритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа. Показано, что в этом случае для получения замыкающего задачу условия достаточно задавать H - высоту ступени в физической плоскости.

В п. 1.2.3 краевая задача отыскания аналитической в области D_t функции $\chi(t)$ сведена к решению систем нелинейных интегральных уравнений для докритического и сверхкритического режимов обтекания соответственно.

В п.1.3 описан численный метод решения полученных систем интегральных уравнений. Для приближенного интегрирования использовалось следующее правило: если подынтегральное выражение не имеет особенностей, то оно аппроксимируется естественным кубическим сплайном (с нулевыми значениями вторых производных на концах интервала интегрирования), после чего

кубический сплайн интегрируется аналитически. После дискретизации полученные системы решались методом Ньютона. Вид полученных систем позволяет на каждом шаге итерационного процесса заполнять якобиан системы аналитически, что существенно сокращает время вычислений.

В п. 1.4 проведен анализ результатов числовых расчетов.

В п. 1.4.1 проведен численный анализ докритических режимов обтекания наклонной ступени. Для любых течений над ступенью, у которых свободная поверхность имеет горизонтальные асимптоты слева и справа на бесконечности, справедливы формулы:

$$Fr^2 + 2 = \frac{Fr^2}{(L - H/h)^2} + 2L, \quad (1)$$

$$Fr(\infty) = \frac{Fr}{(L - H/h)^{3/2}}. \quad (2)$$

Здесь $L = y(\infty)/h$, $y(\infty)$ - ордината свободной поверхности справа на бесконечности, H - высота ступени в физической плоскости, $Fr(\infty)$ - число Фруда справа на бесконечности.

При $H > 0$ задача об обтекании ступени может трактоваться, как задача о водосливе с широким порогом. Если обозначить через Q расход жидкости через водослив, то $Fr = Q/\sqrt{gh^3}$. Таким образом, при фиксированных g и h число Фруда прямо пропорционально расходу жидкости Q . В гидравлике для определения расхода через водослив используют так называемый принцип максимума расхода (ПМР), согласно которому на пороге водослива с течением времени сам собой устанавливается безволновой режим обтекания с максимальным расходом. Используя ПМР для приближенного определения связи между Fr и H/h , найдем, что

$$H/h = 1 + Fr^2/2 - \frac{3}{2}Fr^{2/3}, \quad (3)$$

при этом

$$Fr(\infty) = 1, \quad L = H/h + Fr^{2/3}.$$

Проведенный в работе численный анализ показал, что ПМР является приближенно верным. Более того, на основе анализа численных данных получена уточненная зависимость между Fr и $Fr(\infty)$ в диапазоне $0.2 \leq \beta \leq 0.5$

$$Fr(\infty) = 0.1982(1 - Fr)Fr^2 + 0.1871(1 - Fr) + 1. \quad (4)$$

В правую часть последнего соотношения β не входит, поэтому соотношение между Fr и $Fr(\infty)$ оказывается независимым от угла наклона ступени. Отметим, что ПМР дает $Fr(\infty) = 1$. С помощью формул (1), (2), (4) найдем, что

$$H/h = 1 + 1/2(Fr^2 - \frac{Fr^{2/3}(Fr^2(\infty) - 2)}{Fr^{2/3}(\infty)}) \quad (5)$$

$$L = 1/2(Fr^2 + 2 - Fr^{2/3}Fr^{4/3}(\infty)) \quad (6)$$

Таким образом, в работе найдены уточненные зависимости между H/h и Fr , при которых не происходит образования волн вниз по потоку и докритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа. Формулы (5), (6) представляют собой соотношение между L и H/h , записанное в параметрическом виде. На рис. 2 сплошная линия – это результат расчетов, маркеры – результат полученный с помощью (5), (6), штриховая линия – результат, даваемый ПМР.

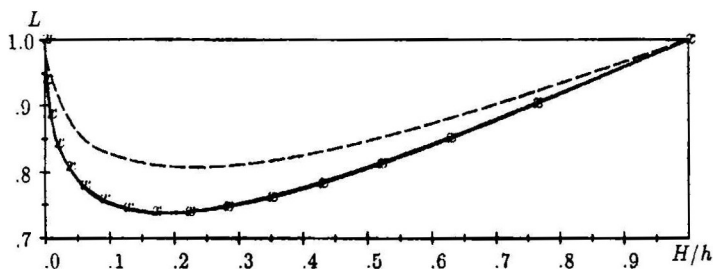


Рис. 2: Графики зависимостей L от H/h

Найдены формы свободной поверхности для различных параметров потока. Пример расчета формы свободной поверхности представлен на рис. 3.

В п. 1.4.2 проведен численный анализ случая, когда сверхкритическое течение переходит в сверхкритическое. При этом волновой пуг справа на бесконечности отсутствует.

Установлено, что задача имеет двухпараметрическое семейство решений. Проведены расчеты как для $H > 0$, так и для $H < 0$. В случае $H < 0$, $|H/h| \gg 1$ (течение типа водопада) получены приближенные аналитические формулы для определения формы свободной поверхности.

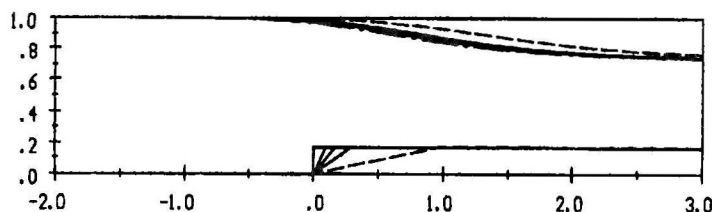


Рис. 3: Формы свободной поверхности в случае докритического течения ($Fr = 0.5$) для различных значений β . 1. $\beta = 1/2$, 2. $\beta = 1/3$, 3. $\beta = 1/4$, 4. $\beta = 1/6$, 5. $\beta = 1/18$.

Пример расчета формы свободной поверхности для понижающегося дна представлен на рис. 4.

Во втором разделе диссертации решены стационарные задачи анодного формообразования с учетом произвольной зависимости выхода по току и неравномерной поляризации анода для различных схем катода-инструмента. Стационарная ЭХРО осуществляется электродом, движущимся так, что форма межэлектродной области за счет анодного растворения металла не изменяется. При решении используется интерпретация задач ЭХРО как задач построения комплексного потенциала течения в бесконечном криволинейном канале, одна стенка которого задана, а

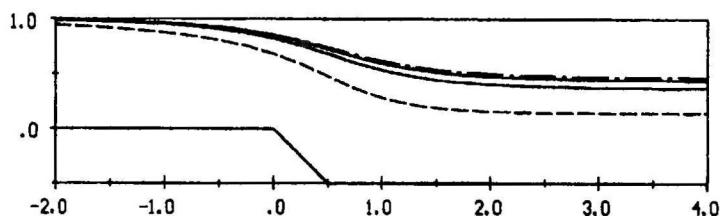


Рис. 4: Формы свободной поверхности при фиксированном $H/h = -0.5$ и $\beta = -1/4$ для различных чисел Фруда от $Fr = 1.1$ (пунктирная линия) до $Fr = 4$ (штрих-пунктирная линия).

другая определяется в ходе решения задачи. При этом на неизвестной границе выполняются определенные граничные условия, учитывающие специфику ЭХРО (стационарность процесса, переменность выхода по току, неравномерность поляризации электродов). Впервые идея решения краевых задач ЭХРО в гидродинамической постановке была предложена учеными Казанского университета В.В.Клоковым, А.В.Костериным, М.Т.Нужным⁵. В п. 2.1 дан краткий обзор литературы по методам расчета задач стационарного электрохимического формообразования. Кратко изложены основные понятия электрохимической размерной обработки металлов. Описана принимаемая модель электрического поля и раскрыт физический смысл граничных условий.

Во п. 2.2 решена задача расчета анодного формообразования катодом-инструментом в виде клина при стационарной ЭХО для произвольной зависимости выхода по току.

Задача определения стационарной формы границы анода по заданной форме катода-инструмента согласно гидродинамической аналогии эквивалентна задаче построения комплексного потенциала течения в бесконечном криволинейном канале с расходом Q , одна стенка которого (Γ_1) задана, а вторая (Γ_0) неизвестна

⁵Клоков В.В., Костерин А.В., Нужин М.Т. О применении обратных краевых задач в теории электрохимической размерной обработки. - В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Вып.9. Казань: Изд-во КГУ. 1972. С.132-140.

и должна быть определена в ходе решения задачи. При этом на Γ_0 выполняется условие стационарности

$$\lambda(V)V = \cos \Theta, \quad (7)$$

где V - скорость (безразмерная плотность тока, отнесенная к плотности тока в торцевом зазоре), $\lambda(V)$ - заданная функция (коэффициент выхода по току, $V_{кр} \leq V \leq 1, V_{кр} \geq 0$), Θ - угол между касательной к Γ_0 и осью x . Ось x направлена перпендикулярно направлению подачи катода-инструмента (рис. 5). Заданы углы наклона лучей клина Θ_1 и Θ_2 , а также расход Q .

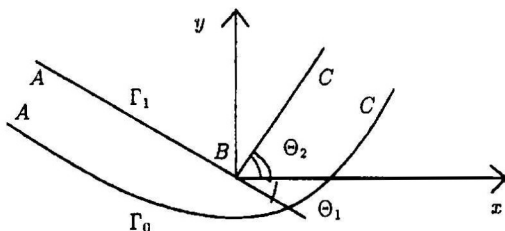


Рис. 5: Физическая область течения.

В результате решения вспомогательной задачи, основанного на теории краевых задач для аналитических функций, получается условие, связывающее действительную и мнимую части функции $\ln(\frac{dW}{dz})$ на свободной границе. Указанное условие используется для получения нелинейного интегро-дифференциального уравнения для отыскания неизвестных параметров, определяющих конформное отображение канонической области на физическую. В качестве канонической области выбирается полоса ширины $\pi/2$ в параметрической плоскости t .

Для проверки предложенного метода был проведен тестовый расчет. Катод-инструмент представляет собой прямолинейный луч $x = 0, y \geq 0, \lambda(V) = 1$. В этом случае задача имеет точное решение, и деталь представляет собой параболу $y = (x^2 - 1)/2$. Результаты расчетов показали хорошее совпадение теоретичес-

кой и рассчитанной кривых. Для $\lambda(V) = 1$ отмечается также хорошее совпадение результатов с результатами В.В.Клокова, полученными аналитически. Проведенные расчеты демонстрируют влияние непостоянства выхода по току на форму детали-анода.

В п. 2.3 решена задача расчета анодного формообразования катодом-инструментом с криволинейной границей, при стационарной ЭХО для произвольной зависимости выхода по току.

В отличие от предыдущей задачи катод-инструмент задается в виде функции $\Theta = F(S)$, где Θ - угол наклона касательной к Γ_1 к оси x , S - длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки на инструменте. В этом случае выводится дополнительное соотношение, связывающее длину дуги S и реальную часть функции $\ln(\frac{dW}{dz})$ на свободной границе. Полученное соотношение позволяет вывести систему нелинейных интегральных уравнений для отыскания конформного отображения канонической области на физическую. На рис. 6 представлен пример числовых расчетов, когда катод-инструмент имеет форму параболы $y = x^2$.

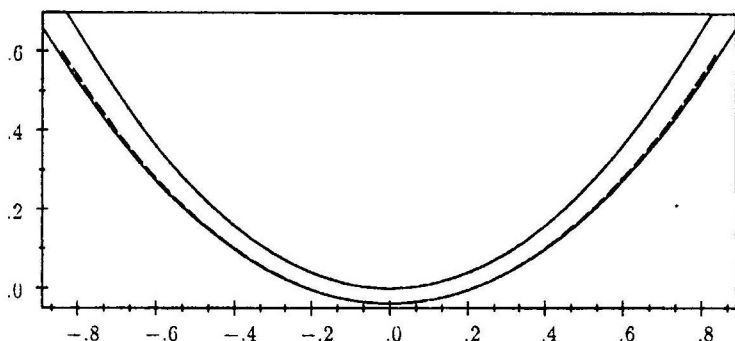


Рис. 6:

Сплошной линией изображена форма детали при постоянном выходе по току ($\lambda(V) = 1$). Пунктиром отмечена форма детали, полученная с учетом пассивирующих свойств электролита.

В п. 2.4 исследована задача расчета анодного формообразования двугранным катодом-инструментом при стационарной ЭХО

для произвольной зависимости выхода по току с учетом неравномерной поляризации анода.

Неравномерная поляризация анода приводит к тому, что гармоническая функция ψ (потенциал электроического поля) не будет постоянной вдоль границы детали-анода, а будет удовлетворять условию $\psi = F(\frac{\partial \psi}{\partial n})$. С точки зрения гидромеханической интерпретации это условие означает проницаемость свободной границы.

В результате решения смешанной краевой задачи в канонической области получается условие, связывающее действительную и мнимую части функции $\frac{dW}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + i\frac{d\psi}{dt}$ на свободной границе, здесь W - комплексный потенциал течения. Полученное в результате выражение для ψ используется при выводе нелинейного интегрального уравнения для отыскания неизвестных параметров, определяющих конформное отображение параметрической области на физическую. Приведены примеры числовых расчетов.

В заключении сформулированы основные результаты, выносимые на защиту:

1. Численно-аналитический метод расчета безволнового обтекания препятствия в виде наклонной ступени тяжелой жидкостью.
2. Результаты числовых расчетов для различных высот ступени и углов ее наклона при различных значениях параметров течения.
3. Численный анализ "правильности" принципа максимума расхода, применяемого в гидравлике.
4. Численно-аналитический метод расчета стационарного анодного формообразования катодом-инструментом в виде клина с учетом произвольной зависимости выхода по току.
5. Численно-аналитический метод расчета стационарного анодного формообразования криволинейным катодом-инструментом с учетом произвольной зависимости выхода по току.
6. Численно-аналитический метод расчета стационарного анодного формообразования катодом-инструментом в виде клина с

учетом произвольной зависимости выхода по току и неравномерной поляризации анода.

7. Результаты числовых расчетов для различных схем катод-инструмента с учетом произвольной зависимости выхода по току и неравномерной поляризации анода.

Работа над диссертацией выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-00169, 99-01-00173), фонда НИОКР АНТ.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Метод расчета анодного формообразования катодом-инструментом с криволинейной границей для произвольной зависимости выхода по току // Проблемы гидродинамики больших скоростей. - Чебоксары: Чув. ун-т, 1993. - С.70-74.

2. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Метод расчета анодного формообразования двугранным катодом для произвольной зависимости выхода по току // Теория и практика электрофизикохимических методов обработки деталей в авиастроении. - Казань: Изд-во КАИ, 1994. - С.32-35.

3. Газизов Е.Р. Учет пассивирующих свойств электролита при расчете анодного формообразования двугранным катодом // Деп. в ВИНТИ. - 08.07.94. - N1728-B94 - 9 с.

4. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Метод расчета анодного формообразования катодом-инструментом с криволинейной границей для произвольной зависимости выхода по току // Тезисы докладов городской научно-технической конференции "Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов" (ЭФЭХО-94). - 1 декабря 1994 г., Казань. - С.9-11.

5. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Безволновое обтекание ступени // Тезисы докладов международной научно-технической конференции "Механика Машиностроения" (ММ-95), 28-30 марта 1995 г.- Челны. 1995. - С.30.

6. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Течение тяжелой жидкости в канале с полигональным дном // Деп. в ВИНТИ. - 18.06.96 -

№2007 - В96 - 17 с.

7. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Безволновые режимы обтекания ступени //Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. - Казань: Изд-во Унипресс, 1999. - Т.3. - С.246-252

8. Газизов Е.Р. Электрохимическая обработка криволинейным катодом-инструментом при произвольной зависимости выхода по току //Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. - Казань: Изд-во Унипресс, 1999. - Т.3. - С.270-274

9. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Расчет безволновых режимов обтекания ступени // Тезисы докладов международной научно-технической конференции, 29-31 марта 2000 г. - Набережные Челны. 2000. - С.20-21.

Отпечатано в Центре оперативной полиграфии
"УНИПРЕСС" ЦВИД КГУ
Заказ № 08/05. Тираж 120 экз.
420008, Казань, ул.Кремлевская, 18
Тел. 64-69-26

7-20